

Marcin PLEWA*

ANALIZA MODELI EOQ W SYSTEMACH LOGISTYKI ZWROTÓW

W systemach logistyki zwrotów popyt może zostać zaspokojony częściowo przez produkcję lub zakup nowych produktów oraz przez odzysk wartości ze zwróconych produktów. W większości modeli prezentowanych w literaturze produkty są zwracane do miejsc, w których następnie są składowane. W odpowiednim czasie realizowane są procesy odzysku wartości w celu zaspokojenia występującego popytu. Część zwróconych produktów może zostać poddana utylizacji.

W logistyce zwrotów duże znaczenie ma zarządzanie zapasami. Celem tego artykułu jest prezentacja modeli będących modyfikacjami klasycznego modelu ekonomicznej wielkości zamówienia. Pierwszy model tego typu został opracowany przez Schrady'ego w 1967 r. Kierując się podobnymi założeniami, modele ekonomicznej wielkości zamówienia opracowali między innymi Nahmias i Rivera, Mabini, Richter, Dobos, Saadany oraz Jaber. Wszystkie te modele, chociaż bardzo interesujące, są modelami deterministycznymi, mało przydatnymi w praktyce.

1. WPROWADZENIE

Logistyka zwrotów rozumiana jako proces zarządzania przepływem strumieni zwrotnych materiałów, zapasów w toku, dóbr finalnych oraz powiązanych z nimi informacji staje się jednym z kluczowych obszarów zainteresowań logistyków. Cieszy się coraz większym zainteresowaniem w wielu gałęziach przemysłu. Obecnie coraz więcej przedsiębiorstw zdaje sobie sprawę ze znaczenia tego obszaru logistyki.

W literaturze zagadnienia znaczną uwagę przykładają się do zarządzania zapasami. Do tej pory opracowano wiele modeli matematycznych z tego obszaru¹.

* Mgr Marcin Plewa, Politechnika Wrocławska

¹ Fleischmann, M., Bloemhof-Ruwaard, J. M., Dekker, R., van der Laan, E., van Nunen, J. A. E. E., Van Wassenhove, L. N. Quantitative models for reverse logistics: A review. *European Journal of Operational Research*, 103 (1997), 1-17; Thierry, M.C., Salomon, M., Van Nunen, J., Van Wassenhove, L., 1995. Strategic issues in product recovery management. *California Management Review* 37, 114-135

Celem tego artykułu jest prezentacja modeli będących modyfikacjami klasycznego modelu ekonomicznej wielkości zamówienia. Praca została podzielona na podrozdziały, w których opisano modele zaprezentowane w literaturze przez poszczególnych autorów.

2. OPIS MODELI

2.1. SCHRADY

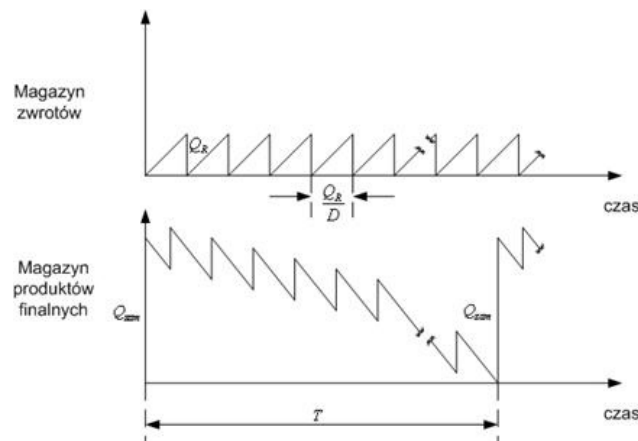
Pierwsze modele w tej kategorii zostały opracowane przez Schrady'ego. W modelach Schrady'ego popyt na wyroby finalne D może zostać zaspokojony przez odzysk zwrotów lub zakup nowych produktów. Popyt D , wyrażony w sztukach na jednostkę czasu, jest zdeterminowany i stały. Produkty procesu odzysku są „tak dobre jak nowe”. Produkty są zwracane zgodnie ze wskaźnikiem zwrotu $Z = \alpha D$, gdzie $0 \leq \alpha \leq 1$. Schrady nie rozważa możliwości utylizacji zwrotów, wszystkie poddawane są procesowi odzysku. Analizowane są dwa magazyny:

1. magazyn zwrotów, w którym składowane są produkty oczekujące na proces odzysku,
2. magazyn wyrobów finalnych. W tym magazynie znajdują się produkty procesów odzysku i nowe wyroby.

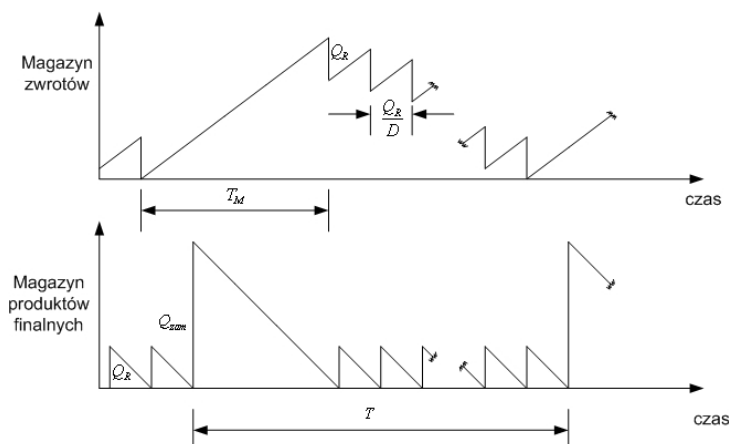
Celem Schrady'ego jest wyznaczenie optymalnych wielkości partii zakupowych Q_{zam} oraz partii odzysku Q_r . W modelu uwzględniane są czasy realizacji dostaw jednej partii: z zewnątrz T_{zam} i z odzysku T_{zamw} . Schrady nie dopuszcza opóźnień w realizacji procesów. Prezentuje dwa modele zarządzania zapasami we wcześniej wspomnianych magazynach.

W pierwszym modelu, zaprezentowanym na rysunku 1, proces odzysku jest uruchamiany, gdy poziom zapasu w magazynie zwrotów osiągnie pewien ustalony poziom. Produkty są dostarczane z zewnątrz w chwili, gdy poziom zapasu w magazynie wyrobów finalnych spadnie do zera.

Rysunek 1. Pierwszy model zaprezentowany przez Schrady'ego w 1966 r.



Rysunek 2. Modyfikacja klasycznego modelu EOQ zaprezentowana przez Schrady'ego w 1967r.



Drugi model Schrady'ego (rysunek 2) jest modyfikacją klasycznego modelu ekonomicznej wielkości zamówienia EOQ². W drugim modelu Schrady rozróżnia koszty składowania w pierwszym i drugim magazynie, które wynoszą odpowiednio: k_{skz} i k_{sknp} . Różne są także koszty realizacji zamówienia z zewnątrz K_{zam} oraz koszty uruchomienia procesu odzysku K_{ur} . W drugim modelu popyt jest całkowicie zaspokajany przez odzysk zwrotów do chwili, gdy poziom zapasu znajdującego się w pierwszym magazynie będzie niewystarczający na wypełnienie partii odzysku. W tej chwili jest dostarczane zamówienie zewnętrzne i od tego momentu popyt jest zaspokajany wyłącz-

nie z partii zakupowej. W tym okresie zwroty są składowane przez okres $T_M = \frac{(Q_{zam} + Q_R)}{D}$. Proces

odzysku jest uruchamiany o T_{zamw} wcześniej, niż nastąpi wyczerpanie zapasu w drugim magazynie. Długość okresu pomiędzy kolejnymi dostawami z zewnątrz wyznacza analizowany okres cyklu T .

W trakcie cyklu proces odzysku jest uruchamiany $m = \frac{\alpha Q_{zam}}{((1-\alpha)Q_R)}$ razy. Zatem:

$$T = \frac{(Q_{zam} + mQ_R)}{D} = \frac{Q_{zam}}{(1-\alpha)D}$$

Funkcja łącznych kosztów przypadających na jednostkę czasu przyjmuje następującą postać:

$$E_{jed} = \frac{K_{zam}D(1-\alpha)}{Q_{zam}} + \frac{K_{ur}\alpha D}{Q_R} + \frac{k_{sknp}}{2} \left(Q_R + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) Q_{zam} \right) + \frac{k_{skz}}{2} (Q_{zam} + Q_R) \rightarrow \min$$

Wyznaczone optymalne wielkości partii zakupowej i odzysku wynoszą odpowiednio:

$$Q_{zam}^* = \sqrt{\frac{2K_{zam}D(1-\alpha)}{k_{sknp}(1-\alpha) + k_{skz}\alpha}}, \quad Q_R^* = \sqrt{\frac{2K_{ur}D}{k_{sknp} + k_{skz}}}$$

² Fleischmann, M., Bloemhof-Ruwaard, J. M., Dekker, R., van der Laan, E., van Nunen, J. A. E. E., Van Wassenhove, L. N. Quantitative models for reverse logistics: A review. *European Journal of Operational Research*, 103 (1997), 1-17; Teunter, R. H. Economic order quantities for recoverable item inventory system. *Naval Research Logistics*, 48 (2001), 484-495.

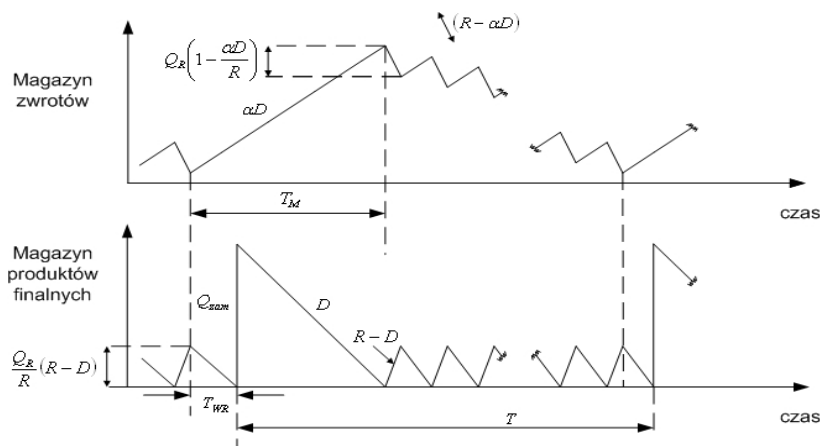
W pierwszym modelu minimalizowany jest zapas znajdujący się w magazynie zwrotów. W drugim modelu dąży się do minimalizacji zapasu wyrobów finalnych³.

2.2. NAHMIAS I RIVERA

Kontynuacją pracy Schrady'ego zajęli się Steven Nahmias oraz Henry Rivera. Rozpatrują podobny system składający się z dwóch magazynów. Nahmias i Rivera, w przeciwieństwie do Schrady'ego, zakładają ograniczoną wydajność procesu odzysku. Produkty są odzyskiwane i dostarczane z zewnątrz w partiach. Wydajność procesu odzysku określa wskaźnik odzysku $R > D$. Nahmias i Rivera zakładają zerowe czasy dostaw. Zwroty opuszczają pierwszy magazyn na skutek odzysku w liczbie $\left(\frac{Q_R}{R}\right)(R - \alpha D)$ na jednostkę czasu. Tak jak w modelu Schrady'ego, gdy poziom zapasu w pierwszym magazynie spadnie poniżej tej wartości, proces odzysku zostaje zawieszony. Następnie przez okres T_M produkty są składowane. Od momentu zatrzymania procesu odzysku, po okresie $T_{WR} = \frac{Q_R}{RD}(R - D)$ następuje wyczerpanie zapasu w drugim magazynie. Jest to jednocześnie chwila dostarczenia partii zakupowej⁴.

$$T_M = T_{WR} + \frac{Q_{zam}}{D} = \frac{Q_{zam}}{D} + \left(\frac{Q_R}{D}\right)\left(1 - \frac{D}{R}\right)$$

Rysunek 3. Modyfikacja modelu Schrady'ego z ograniczoną wydajnością procesu odzysku.



Optymalne wielkości partii zamówieniowej oraz odzysku wynoszą odpowiednio⁵:

$$Q_{zam}^* = \sqrt{\frac{2K_{zam}D(1-\alpha)}{k_{sknp}(1-\alpha) + k_{skz}\alpha}} \quad Q_R^* = \sqrt{\frac{2K_{ur}D}{(k_{sknp} + k_{skz})\left(1 - \frac{D}{R}\right)}}$$

³ Schrady, D.A., A deterministic inventory model for repairable items. Naval Research Logistics Quarterly 14/3 (1967) 391-398.

⁴ Nahmias, S., and Rivera, H., A deterministic model for a repairable item inventory system with a finite repair rate. International Journal of Production Research 17 (1979) 215-221

⁵ tamże

2.3. TEUNTER

J Kolejnym rozwinięciem modelu przedstawionego przez Schrady'ego jest model opracowany przez Teuntera. W podejściu zaprezentowanym przez tego autora, n partii produkcyjnych występuje W na przemian z m -partiami odzysku. W modelu Schrady'ego występuje tylko jedna partia zamówień wystę p S

$$\bar{K}(\psi) = \frac{K_{up}D(1-\psi)}{Q_{prod}} + \frac{K_{ur}D\psi}{Q_R} + k_{skpr} \frac{1}{2}\psi Q_R + k_{sknp} \frac{1}{2}(1-\psi)Q_{prod} +$$

$$+ k_{skz} \frac{1}{2} \left(\alpha(Q_{prod} + Q_R) - (\alpha - \psi) \left(Q_{prod} + \frac{\psi}{1-\psi} Q_{prod} \right) \right) \frac{\psi}{\alpha} + D((1-\psi)k_p + \psi k_r + (\alpha - \psi)k_u) \rightarrow \min$$

Liczba uruchomień procesu odzysku wynosi:

$$m = \frac{\psi}{1-\psi} \frac{Q_{prod}}{Q_R}$$

Optymalna wielkość partii produkcyjnej, odzysku oraz optymalna liczba uruchomień procesu odzysku wynoszą odpowiednio:

$$Q_{prod}^*(\psi) = \sqrt{\frac{2K_{up}D(1-\psi)}{k_{sknp}(1-\psi) + k_{skz} \left(\psi - \frac{\alpha - \psi}{1-\psi} \frac{\alpha}{\psi} \right)}}$$

$$Q_R^*(\psi) = \sqrt{\frac{2K_{ur}D}{k_{skpr} + k_{skz}}}$$

$$m^*(\psi) = \frac{\psi}{1-\psi} \frac{Q_{prod}^*(\psi)}{Q_R^*(\psi)}$$

W kolejnym kroku Teunter wyznacza optymalne wartości $Q_{prod}(\psi)$, $Q_R(\psi)$ oraz $n(\psi)$ przy założeniu, że $m=1$

$$n = \frac{1-\psi}{\psi} \frac{Q_R}{Q_{prod}}$$

Funkcja średnich łącznych kosztów dla $m=1$ przyjmuje następującą postać:

$$\bar{K}(\psi) = \frac{K_{up}D(1-\psi)}{Q_{prod}} + \frac{K_{ur}D\psi}{Q_R} + k_{skpr} \frac{1}{2}\psi Q_R + k_{sknp} \frac{1}{2}(1-\psi)Q_{prod} +$$

$$+ k_{skz} \frac{1}{2} Q_R \frac{\psi}{\alpha} + D((1-\psi)k_p + \psi k_r + (\alpha - \psi)k_u) \rightarrow \min$$

Teunter wyznacza optymalne wartości $Q_{prod}(\psi)$, $Q_R(\psi)$ oraz $n(\psi)$ dla dwóch przypadków:

1. Gdy $\psi = 0$, tzn. że wszystkie zwrócone produkty są utylizowane

$$Q_{prod}^*(\psi) = \sqrt{\frac{2K_{up}D}{k_{sknp}}}$$

$$Q_R^*(\psi) = \sqrt{\frac{2K_{ur}D\alpha}{\alpha k_{skpr} + k_{skz}}}$$

$$m^*(\psi) = \infty$$

2. Gdy $\psi = \alpha$, tzn. że wszystkie zwrócone produkty są poddawane procesom odzysku

$$Q^*_{prod}(\psi) = \sqrt{\frac{2K_{up}D}{k_{sknp}}}$$

$$Q^*_R(\psi) = \sqrt{\frac{2K_{ur}D\alpha}{\alpha k_{skpr} + k_{skz}}}$$

$$m^*(\psi) = \frac{1-\psi}{\psi} \frac{Q^*_R(\psi)}{Q^*_{prod}(\psi)}$$

Fleischman w pracy⁶ zauważa, że wszystkie z powyższych modeli szukają optymalnych wartości parametrów narzuconej polityki postępowania. Nie sprawdzają optymalności samej polityki⁷.

2.4. MABINI, PINTELON, GELDERS

Kolejnymi autorami, którzy opisują możliwość zastosowania modelu EOQ w logistyce zwrotów, są: Marilyn C. Mabini, Liliane M. Pintelon oraz Ludo F. Gelders. Autorzy rozwijają model Schrady'ego, rozpatrując dwa przypadki:

1. procesom odzysku jest poddawany tylko jeden rodzaj produktów,
2. jednocześnie są realizowane procesy odzysku różnych typów produktów.

2.4.1. Odzysk jednego rodzaju produktów

W analizowanym modelu Mabini uwzględnia dodatkowo wartość nowych produktów W_{np} , produktów oczekujących na odzysk W_z oraz koszt składowania h wyrażony jako procent wartości produktu. Znając h , W_z oraz W_{np} można wyznaczyć jednostkowy koszt składowania zwrotów k_{skz} oraz jednostkowy koszt składowania wyrobów finalnych k_{sknp} . W przeciwieństwie do modelu Schrady'ego zlecenia mogą przyjmować status oczekujących. Zamówienia niezrealizowane na skutek wystąpienia braku w wielkości B_{bz} oczekują na realizację. Dozwolone jest wystąpienie określonej liczby l_{bz} sztuko-jed.czasu braku w zapasie w pewnym okresie.

W analizowanym modelu obliczane są dodatkowo chwila zamawiania R_{zam} oraz chwila uruchomienia odzysku R_{odz} . Obliczany jest średni zapas nowych produktów, który jest opisany za pomocą następującego wyrażenia:

⁶ Fleischmann, M., Bloemhof-Ruwaard, J. M., Dekker, R., van der Laan, E., van Nunen, J. A. E. E., Van Wassenhove, L. N. Quantitative models for reverse logistics: A review. *European Journal of Operational Research*, 103 (1997), 1-17.

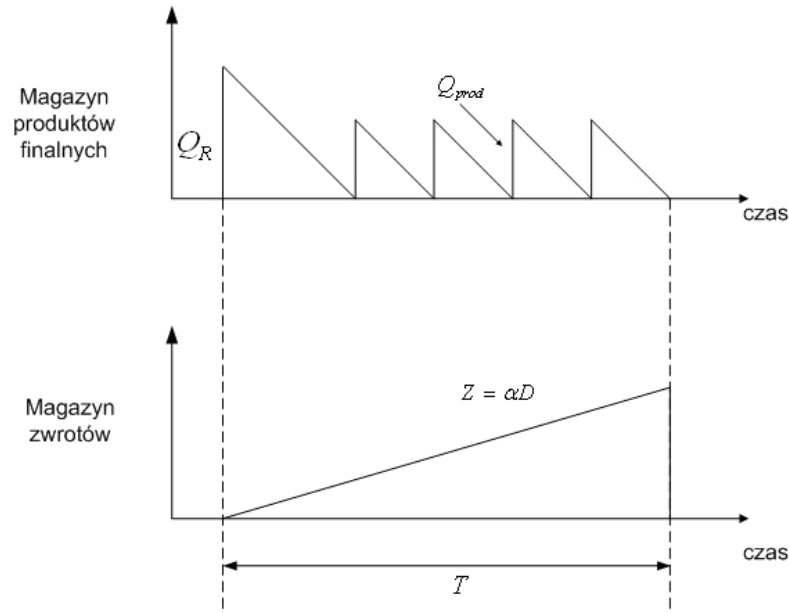
⁷ Fleischmann, M., Bloemhof-Ruwaard, J. M., Dekker, R., van der Laan, E., van Nunen, J. A. E. E., Van Wassenhove, L. N. Quantitative models for reverse logistics: A review. *European Journal of Operational Research*, 103 (1997), 1-17. Teunter, R. H. Economic order quantities for recoverable item inventory system. *Naval Research Logistics*, 48 (2001), 484-495.

Teunter, R. H., & Flapper, S. D. P. Lot-sizing for a single-stage single-product production system with rework of perishable production defectives. *OR Spectrum*, 25 (2003), 85-96.

Teunter, R. H. Lot-sizing for inventory systems with product recovery. *Computers & Industrial Engineering*, 46 (2004), 431-441.

$$S_{zn} = \frac{(1-\alpha)(Q_{zam} - B_{bz})^2}{2Q_{zam}} + \frac{\alpha(Q_R - B_{bz})^2}{2Q_R}$$

Rysunek 5. Model Mabini uwzględniający możliwość wystąpienia braku w zapasie wyrobów finalnych.



W modelu Mabini zachowane jest założenie Schrady'ego o zerowym poziomie zapasu produktów oczekujących na odzysk w chwili zawieszenia procesu odzysku. Średni zapas produktów oczekujących na przetwarzanie można wyznaczyć z równania:

$$S_{zso} = \frac{1}{2} \alpha (Q_{zam} + Q_r)$$

Według autorów do obliczenia całkowitych poniesionych kosztów należy uwzględnić:

- koszty składowania nowych oraz oczekujących na odzysk produktów,
- koszty uruchamiania procesów zakupu oraz odzysku wyrobów,

Minimalizowana funkcja łącznych kosztów ma następującą postać:

$$E = \frac{1}{2} k_{sknp} \left((1-\alpha) \frac{(Q_{zam} - B_{bz})^2}{Q_{zam}} + \alpha \frac{(Q_r - B_{bz})^2}{Q_r} \right) + \frac{1}{2} k_{skz} \alpha (Q_{zam} + Q_r) + K_{zam} \frac{(1-\alpha)D}{Q_{zam}} + K_{ur} \frac{\alpha D}{Q_r}$$

gdzie:

$$6B_{bz}^2 \left(\frac{1-\alpha}{Q_{zam}} + \frac{\alpha}{Q_r} \right) \leq l_{bz}$$

$$Q_{zam} \geq B_{bz}$$

$$Q_r \geq B_{bz}$$

$$Q_{zam}, Q_r, B_{bz} \geq 0$$

2.4.2. Odzysk różnych rodzajów produktów

Większość oznaczeń jest taka jak w modelu jednoelementowym. Różnica polega na dodaniu indeksu określającego rodzaj produktu. Procesom odzysku podawanych jest i różnych typów produktów. Konieczne jest rozdzielenie potencjału odzysku na poszczególne wyroby. Autorzy zakładają, że potencjał odzysku jest ograniczony. W stosunku do wcześniejszych oznaczeń dodane zostały następujące wielkości:

- A_{dpo} – potencjał odzysku dostępny w jednostce czasu,
- $q_{zam i}$ – liczba nowych produktów i dostarczanych z zewnątrz w jednostce czasu,
- q_{ri} – liczba zwrotów i -tego produktu dostarczanych z zewnątrz w jednostce czasu (zwroty są kumulowane w magazynie, gdzie oczekują na realizację procesów odzysku),
- k_{ri} – koszt odzysku jednej sztuki i -tego produktu,
- t_{ri} – czas odzysku jednej sztuki i -tego produktu,
- t_{PRi} – czas przygotowawczy niezbędny do odzysku jednej partii i -tego produktu.

W przeciwieństwie do modelu jednoproduktowego, autorzy nie dopuszczają opóźnień w dostawach do magazynu, wszystkie produkty nadają się do odzysku, a zakup produktów z zewnątrz jest ograniczony do przypadków, gdy wyczerpie się potencjał odzysku. Produkty, które nie zostały poddane procesom odzysku, są sprzedawane po niższej cenie. W modelu wieloelementowym autorzy uwzględniają dodatkowo koszty odzysku jednej partii wyrobów oraz koszty zakupu pomniejszone o przychody ze sprzedaży produktów niepoddanych procesowi odzysku. Funkcja łącznych kosztów przyjmuje następującą postać⁸:

$$NE = \sum_i \left[\frac{k_{skn i} q_{ri}}{2D_i} \left(\frac{Q_{zam i} q_{zam i}}{q_{ri}} + Q_{ri} \right) + \frac{k_{skz i} q_{ri}}{2D_i} (Q_{zam i} + Q_{ri}) + \frac{K_{zam i} q_{zam i}}{Q_{zam i}} + \frac{K_{ur i} q_{ri}}{Q_{ri}} + (W_{np i} - W_{zi}) q_{zam i} + k_{ri} q_{ri} \right]$$

2.5. RICHTER

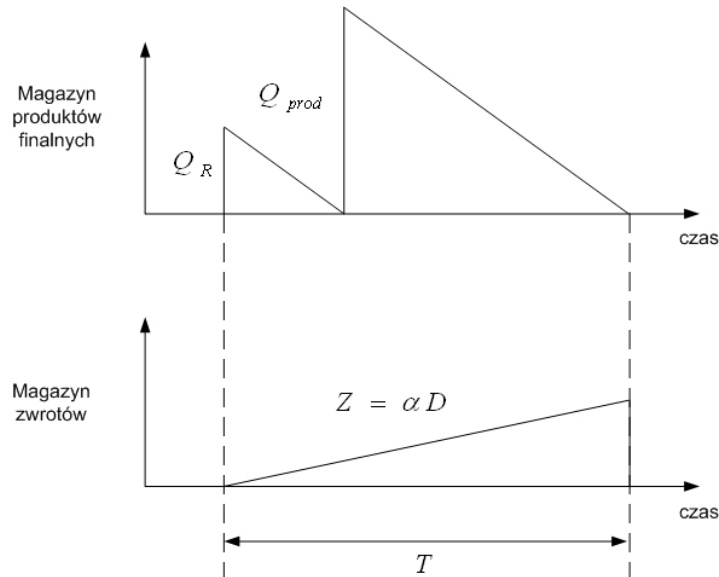
Knut Richter jest kolejnym autorem analizującym model EOQ w logistyce zwrotów. Richter opracował dwustopniowy model opisujący wytwarzanie nowych wyrobów oraz odzysk zużytych produktów. Autor analizuje dwa warsztaty. W pierwszym realizowane są procesy produkcji oraz odzysku. W drugim produkty są eksploatowane. Produkty ulegają uszkodzeniom, te, które nadają się do odzysku, są składowane w drugim warsztacie. Pozostałe są utylizowane przez zewnętrzne przedsiębiorstwo.

Po pewnym zmiennym okresie T , w którym realizowana jest zbiórka zużytych produktów, magazynowane wyroby są przenoszone do pierwszego warsztatu, w którym następuje odzysk wartości. Produkty są składowane zgodnie z współczynnikiem zwrotu α , a utylizowane według współczynnika utylizacji $\vartheta = (1 - \alpha)$. Warsztat, w którym produkty są eksploatowane, generuje stały wskaźnik wielkości popytu D wyrażony w sztukach przypadających na jednostkę czasu. Popyt

⁸ Mabini, M.C., Pintelon, L.M., and Gelders, L.F., EOQ type formulations for controlling repairable inventories. International Journal of Production Economics 28 (1992) 21-33

może zostać zaspokojony przez odzysk uszkodzonych produktów oraz produkcję nowych wyrobów. W przeciwieństwie do Schrady'ego, w cyklu pierwszy jest proces odzysku. Produkty procesu odzysku są „tak dobre jak nowe”. Jeżeli po procesach odzysku pozostanie niezrealizowany popyt, to uruchamiany jest proces wytwarzania nowych wyrobów. Czasy produkcji, odzysku oraz eksploatacji są pomijane.

Rysunek 6. Model Richtera dla $n=1$ oraz $m=1$



Richter wyznacza ekonomiczną wielkość zamówienia $Q = DT$ w danym okresie zbiórki dla produkcji oraz odzysku w celu zaspokojenia popytu generowanego przez drugi warsztat. Wielkość partii odzysku wynosi αQ , a użycia ϑQ . Autor zakłada, że w trakcie okresu T jest uruchamiane jedno zlecenie produkcji oraz jedno zlecenie odzysku. W modelu Richtera uwzględniane są następujące koszty:

- Jednostkowe koszty odzysku k_r , produkcji k_p oraz użycia $u \in (-\infty, +\infty)$;
- Łączny koszt uruchomienia procesów dla całego okresu: KU ;
- Koszty składowania jednej sztuki wyrobu przez jednostkę czasu w pierwszym k_{sknp} oraz drugim warsztacie k_{skz} . Produkty procesu odzysku posiadają taki sam koszt składowania jak wyroby nowe;

Funkcja łącznych kosztów przypadających na jednostkę czasu jest następująca:

$$K_{jed} = \frac{DKU}{Q} + \frac{Q}{2} \left[(\vartheta^2 + \alpha^2) k_{sknp} + \alpha k_{skz} \right] + D \left[\vartheta (k_p + u) + \alpha k_r \right] \rightarrow \min$$

Zgodnie z tą funkcją optymalna wielkość partii wynosi:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DKU}{k_{sknp} (\vartheta^2 + \alpha^2) + \alpha k_{skz}}}$$

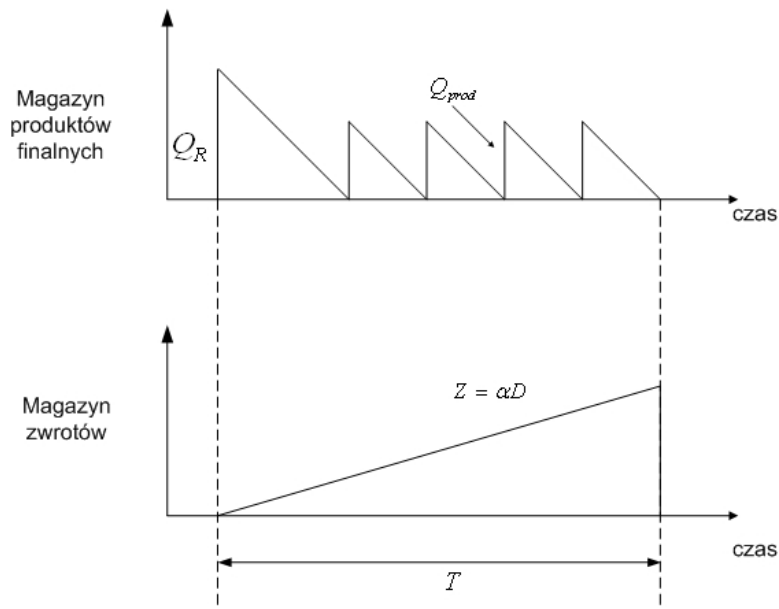
Po podstawieniu Q^* do funkcji łącznych kosztów przypadających na jednostkę czasu, autor wyznacza optymalną wartość współczynnika użycia, dla której łączne koszty są najniższe.

Zakłada, że wartości współczynnika mogą się zmieniać w określonym przedziale $[\vartheta_{\min}, \vartheta_{\max}]$. W kolejnym kroku autor sprawdza, jak na zmiany kosztu utylizacji reaguje wyznaczony wcześniej współczynnik. Wyznacza optymalną wartość współczynnika utylizacji w funkcji kosztu utylizacji.

Opisany model autorstwa K. Richtera dopuszcza jedno uruchomienie procesu produkcji oraz odzysku w analizowanym okresie. W kolejnych pracach Richter znosi to ograniczenie, pozwalając na realizację n procesów produkcji oraz m uruchomień naprawy.

$$n, m \in \{1, 2, \dots\}$$

Rysunek 7. Model Richtera dla $m=1$ oraz $n=4$.



Łączny koszt uruchamiania procesów dla całego okresu K_{UPR} został zastąpiony przez koszt uruchomienia procesu odzysku K_{ur} oraz koszt uruchomienia produkcji K_{up} .

Richter rozpatruje dwa przypadki. W pierwszym odrzuca jednostkowe koszty produkcji, naprawy oraz utylizacji i minimalizuje następującą funkcję kosztów przypadających na jednostkę czasu w analizowanym okresie T :

$$E_{jed}(Q, m, n, \vartheta) = \frac{D(mK_{ur} + nK_{up})}{Q} + \frac{Q}{2} \left[\left(\frac{\vartheta^2}{n} + \frac{\alpha^2}{m} \right) k_{sknp} + \alpha k_{skz} + \frac{\alpha^2 k_{skz} (m-1)}{m} \right] \rightarrow \min$$

gdzie:

$$Q > 0 \text{ oraz } n, m \in \{1, 2, \dots\}$$

Autor wyznacza optymalną wartość partii $Q^*(m, n, \vartheta)$ przy znanych m, n oraz ϑ .

$$Q^*(m, n, \vartheta) = \sqrt{\frac{2D(mK_{ur} + nK_{up})}{\left(\frac{\vartheta^2}{n} + \frac{\alpha^2}{m} \right) k_{sknp} + k_{skz} \alpha + k_{skz} \alpha^2 \frac{(m-1)}{m}}}$$

Funkcja kosztów może zatem przyjąć następującą postać:

$$E_{jed}(m, n, \vartheta) = \sqrt{2D(mK_{ur} + nK_{up}) \left(\left(\frac{\vartheta^2}{n} + \frac{\alpha^2}{m} \right) k_{skp} + \alpha k_{skz} + \frac{\alpha^2 k_{skz} (m-1)}{m} \right)}$$

W kolejnym kroku w celu rozwiązania modelu autor minimalizuje funkcję:

$$E_{jed}(m, n, \vartheta) \rightarrow \min, \text{ gdzie } n, m \in \{1, 2, \dots\}.$$

Wyznaczając optymalne wartości $n(\vartheta)$ i $m(\vartheta)$.

W drugim przypadku autor minimalizuje funkcję będącą sumą dwóch funkcji kosztów:

$$K(Q, m, n, \vartheta) = E_{jed}(Q, m, n, \vartheta) + NE_{jed}(\vartheta) \rightarrow \min$$

gdzie:

$$\begin{aligned} NE_{jed}(\vartheta) &= D(\vartheta(k_p + u) + (1 - \vartheta)k_r) \\ 0 &< \vartheta < 1, \\ Q &> 0 \text{ oraz} \\ n, m &\in \{1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

Funkcja $NE_{jed}(\vartheta)$ uwzględnia koszty niebrane pod uwagę w tradycyjnym modelu EOQ. Richter wyznacza optymalną wartość współczynnika ϑ . [11-15]

2.6. SHIE-GHEUN KOH, HARK HWANG, KWON-IK SOHN ORAZ CHANG-SEONG KO

Autorami, którzy analizują zagadnienie ekonomicznej wielkości zamówienia w logistyce zwrotów, są również Shie-Gheun Koh, Hark Hwang, Kwon-Ik Sohn oraz Chang-Seong Ko. W swojej pracy prezentują model bardzo zbliżony do modeli opisywanych przez takich autorów jak Schrady (1967), Mabini (1992) oraz Richter (1996). Różnica polega jedynie na uwzględnieniu czasu trwania procesu odzysku. Autorzy zakładają, że przynajmniej jedna ze zmiennych określających liczbę zamówień (uruchomień produkcji) oraz liczbę uruchomień procesu odzysku jest równa jedności. Autorzy dążą do wyznaczenia ekonomicznej wielkości zamówienia dla nowych produktów oraz optymalnej wielkości zapasu zwrotów, przy której uruchamiany jest proces naprawy. Podobnie jak poprzednicy autorzy zakładają, że wszystkie parametry modelu są znane. Nie pojawiają się żadne opóźnienia. Odzysk jest bardziej opłacalny niż zakup czy produkcja nowych produktów. Wskaźniki odzysku oraz popytu są większe niż wskaźnik zwrotu produktów⁹.

2.7. RICHTER, DOBOS

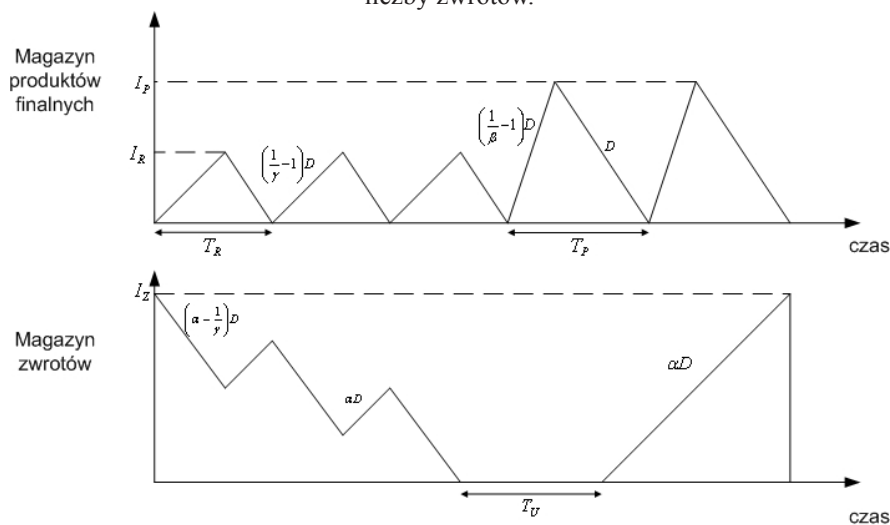
Autorami, którzy również uwzględniają czas trwania procesów odzysku i produkcji, są Knut Richter oraz Imre Dobos. Autorzy opracowali rozwinięcie wcześniej prezentowanego modelu

⁹ Koh, S.G., Hwang, H., Sohn, K.I., Ko, C.S., 2002. *An optimal ordering and recovery policy for reusable items*. Computers & Industrial Engineering 43, 59-73

Richtera. W opracowanym modelu produkty są zwracane zgodnie ze stałym wskaźnikiem zwrotu $Z = \alpha D$, gdzie współczynnik $0 \leq \alpha \leq 1$. Zwrócone produkty są poddawane procesom odzysku w ilości $Z_{odz} = \delta Z$. Parametr δ , $0 \leq \delta \leq 1$ jest nazywany współczynnikiem odzysku. Nie wszystkie zwrócone wyroby są poddawane procesom odzysku. Zgodnie ze współczynnikiem utylizacji $(1-\delta)$ pewna część zwrotów $Z_{utyl} = (1-\delta)Z$ jest usuwana. Popyt jest zaspokajany przez odzysk zwrotów przez okres T_R zwany cyklem odzysku. Czas trwania procesu odzysku jest określany za pomocą wskaźnika odzysku $R > D = \gamma R$ i wynosi γT_R jednostek czasu. Przez pozostałą część cyklu popyt jest zaspokajany przez pobieranie produktów z magazynu. Produkty są wytwarzane zgodnie ze wskaźnikiem produkcji $P > D = \beta P$. Czas cyklu produkcji wynosi T_P jednostek czasu. Czas trwania procesu wytwarzania wyznaczany jest analogicznie jak dla procesu odzysku. Rozpatrywany okres T można podzielić na m cykli odzysku oraz n cykli produkcji. Okres $T = mT_R + nT_P$ jest przez autorów nazywany cyklem produkcji i odzysku. W okresie T do utylizacji kierowanych jest $Z_{utyl}T$ zwrotów. Okres T_U , w którym przeprowadzana jest utylizacja, trwa $(1-\delta)T$ jednostek czasu. W trakcie tego przedziału czasu wszystkie zwracane produkty są natychmiast utylizowane. Zwroty są magazynowane w okresie $T_M = T - T_D$.

W modelu Richtera i Dobosa poziom zapasów w magazynie zwrotów wzrasta do chwili ukończenia cyklu produkcyjnego. Osiąga wartość $I_Z = [(1+\alpha)m + \alpha(1+\gamma)]DT_R$. I_Z jest jednocześnie wartością początkową, która określa liczbę zwrotów znajdujących się w magazynie na początku cyklu produkcji i odzysku. Maksymalne wartości zapasu produktów odzysku oraz wyrobów nowych wynoszą odpowiednio $I_R = (1-\gamma)DT_R$ oraz $I_P = (1-\beta)DT_P$. Produkty są wytwarzane i odzyskiwane w partiach. Partia odzysku $Q_R = DT_R$, a partia produkcji $Q_{prod} = DT_P$.

Rysunek 8. Model Dobosa oraz dopuszczający wiele uruchomień procesu produkcji i odzysku oraz utylizację pewnej liczby zwrotów.



W pracy autorzy wyznaczają optymalne długości cykli produkcji i odzysku, wielkości partii oraz liczby uruchomień produkcji i odzysku. Optymalna wartość czasu cyklu produkcji i odzysku

$$T^*(m, n, \alpha, \delta) = \sqrt{\frac{2K_{URPj}(m, n)}{DK_{SKLjD}(m, n, \alpha, \delta)}}$$

gdzie:

K_{URPj} – łączne koszty uruchomienia procesów na jednostkę czasu

K_{SKLjD} – łączne koszty składowania w danym okresie na jednostkę czasu na jednostkę popytu

Optymalne długości cykli produkcji i odzysku wynoszą odpowiednio:

$$T_P^*(m, n, \alpha, \delta) = \frac{1 - \alpha\delta}{n} \sqrt{\frac{2K_{URP_j}(m, n)}{DK_{SKL_{jD}}(m, n, \alpha, \delta)}}$$

$$T_R^*(m, n, \alpha, \delta) = \frac{\alpha\delta}{m} \sqrt{\frac{2K_{URP_j}(m, n)}{DK_{SKL_{jD}}(m, n, \alpha, \delta)}}$$

Natomiast optymalne wielkości partii produkcji i odzysku:

$$Q_{prod}^*(m, n, \alpha, \delta) = \frac{1 - \alpha\delta}{n} \sqrt{\frac{2DK_{URP_j}(m, n)}{K_{SKL_{jD}}(m, n, \alpha, \delta)}}$$

$$Q_R^*(m, n, \alpha, \delta) = \frac{\alpha\delta}{m} \sqrt{\frac{2DK_{URP_j}(m, n)}{K_{SKL_{jD}}(m, n, \alpha, \delta)}}$$

W kolejnej pracy Dobos oraz Richter rozwijają wcześniej opracowany model o zagadnienie jakości zwracanych produktów. Autorzy zakładają, że nie wszystkie zwrócone wyroby nadają się do odzysku. Liczba zwrotów, które mogą zostać poddane procesom odzysku, wynosi ψD , gdzie $0 \leq \psi \leq 1$ jest znane. Według autorów, producent może wybrać jedną z dwóch strategii: odkupić wszystkie dostępne produkty i przeprowadzić kontrolę jakości albo odkupić tylko te, które nadają się do recyklingu. W pierwszym przypadku $0 \leq \alpha \leq 1$ oraz $0 \leq \delta \leq \psi$, a w drugim $0 \leq \alpha \leq \psi$ oraz $0 \leq \delta \leq 1$. Pierwsza strategia jest bardziej opłacalna w przypadku, gdy uwzględniane są tylko koszty składowania, druga – gdy rozpatrywane są również pozostałe koszty uwzględniane w modelu¹⁰.

2.8. SAADANY, JABER

Model zaprezentowany przez Richtera (1996a, 1996b) został rozwinięty przez Ahmada M.A. El Saadany'ego oraz Mohammada Y. Jabera. Richter zakłada, że pierwszy analizowany okres rozpoczyna się procesem odzysku. Saadany i Jaber zauważają, iż w pierwszym okresie powinna być realizowana tylko produkcja nowych wyrobów, ponieważ wcześniej nic nie zostało wyprodukowane i dlatego nie ma zwrotów. Ponadto założenie Richtera prowadzi do powstania

¹⁰ Dobos, I., & Richter, K. The integer EOQ repair and waste disposal model – Further analysis. Central European Journal of Operations Research, 8 (2000), 173–194.

Dobos, I., & Richter, K. A production/recycling model with stationary demand and return rates. Central European Journal of Operations Research, 11 (2003), 35–46.

Dobos, I., & Richter, K. An extended production/recycling model with stationary demand and return rates. International Journal of Production Economics, 90 (2004), 311–323.

Dobos, I., Richter, K. A production/recycling model with quality consideration. International Journal of Production Economics, 104 (2006), 571–579

Richter, K., Dobos, I. Analysis of the EOQ repair and waste disposal model with integer setup numbers. International Journal of Production Economics, 59 (1999), 463–467

niewykorzystanego zapasu w drugim warsztacie, co podnosi koszty składowania. Autorzy uważają również, że w modelu Richtera konieczne jest uwzględnienie kosztów związanych z przebrojeniem linii produkcyjnej z odzysku na produkcję i odwrotnie. Autorzy zakładają: brak ograniczenia zdolności produkcyjnych i odzysku, odzyskane produkty są tak dobre jak nowe, popyt jest stały i niezależny, czasy dostawy są równe zero, nie uwzględnia się opóźnień, rozpatrywany jest jeden typ produktu, możliwości składowania są nieograniczone, horyzont planowania jest nieskończony.

Długość pierwszego okresu T_1 , w którym realizowana jest tylko produkcja, jest mniejsza niż długość okresu, w którym przeprowadzane są oba procesy. Po uwzględnieniu tego założenia funkcja łącznych kosztów przypadających na jednostkę czasu przyjmuje następującą postać:

$$E_{jed}(Q, m, n, \psi) = \frac{D(mK_{ur} + nK_{up})}{Q} + \frac{Q}{2} \left[\left(\frac{\psi^2}{n} + \frac{\vartheta^2}{m} \right) k_{sknp} + \vartheta k_{skz} - \frac{\vartheta^2 k_{skz} (m-1)}{m} \right] \rightarrow \min$$

Natomiast optymalna wielkość partii wynosi:

$$Q^*(m, n, \psi) = \sqrt{\frac{2D(mK_{ur} + nK_{up})}{\left(\frac{\psi^2}{n} + \frac{\vartheta^2}{m} \right) k_{sknp} + k_{skz} \vartheta \left(1 - \vartheta + \frac{\vartheta}{m} \right)}}$$

Uwzględnienie kosztów przebrojenia maszyn i urządzeń prowadzi do zmian w sposobie obliczania łącznych kosztów uruchomienia poszczególnych procesów w okresie T . W tym przypadku funkcja ta, dla m uruchomień odzysku i n uruchomień odzysku, przyjmuje następującą postać:

$$K_{URP} = (m-1)K_{ur} + K_{pur} + (n-1)K_{up} + K_{pup}$$

Po uwzględnieniu kosztów przebrojenia maszyn i urządzeń funkcja łącznych kosztów przyjmuje poniższą formę:

$$E_{jed}(Q, m, n, \psi) = \frac{D[(m-1)K_{ur} + K_{pur} + (n-1)K_{up} + K_{pup}]}{Q} + \frac{Q}{2} \left[\left(\frac{\psi^2}{n} + \frac{\vartheta^2}{m} \right) k_{sknp} + \vartheta k_{skz} - \frac{\vartheta^2 k_{skz} (m-1)}{m} \right] \rightarrow \min$$

Wyznaczona optymalna wielkość partii wynosi¹¹:

$$Q^*(m, n, \psi) = \sqrt{\frac{2D[(m-1)K_{ur} + K_{pur} + (n-1)K_{up} + K_{pup}]}{\left(\frac{\psi^2}{n} + \frac{\vartheta^2}{m} \right) k_{sknp} + k_{skz} \vartheta \left(1 - \vartheta + \frac{\vartheta}{m} \right)}}$$

¹¹ Jaber, M. Y., & Rosen, M. A. The economic order quantity repair and waste disposal model with entropy cost. European Journal of Operational Research, 188 (2008), 109–120
Saadany, A., Jaber M. Y. The EOQ repair and waste disposal model with switching costs. Computers & Industrial Engineering, 55 (2008), 219–233.

2.9. YONG HUI OH ORAZ HARK HWANG

Kolejnymi autorami opisującymi możliwość zastosowania modeli EOQ w logistyce zwrotów są Yong Hui Oh oraz Hark Hwang. Autorzy w swojej pracy analizują system, w którym zwrócone produkty po odzysku są traktowane jako surowiec w procesie produkcji nowych wyrobów. Konieczny jest również zakup nowego surowca. Autorzy zakładają, że każdy zwrócony produkt nadaje się do odzysku. Celem systemu jest kontrola zamówień nowego surowca oraz uruchomień procesu produkcji przy minimalizacji łącznych kosztów. Podobnie jak w poprzednich modelach wskaźnik popytu jest stały i mniejszy od wskaźnika produkcji. Produkty są zwracane zgodnie ze stałym wskaźnikiem zwrotu. W modelu pomijane są czasy trwania procesu recyklingu oraz dostawy nowego surowca. Ponadto w modelu uwzględniane są następujące parametry:

- K_{zams} – koszt realizacji zamówienia nowego surowca,
- k_{sks} – koszt składowania surowca (produkty recyklingu oraz nowy surowiec),
- k_{sknp} – koszt składowania gotowych wyrobów.

Dodatkowe zmienne występujące w modelu:

- o – liczba zamówień nowego surowca w trakcie jednego cyklu,
- Q_{zams} – wielkość partii zakupowej nowego surowca.

Do ważniejszych założeń modelu należą: brak opóźnień w dostawach oraz stwierdzenie, że recykling jest bardziej opłacalny niż zakup nowego surowca. Podczas analizy modelu autorzy rozpatrują dwa przypadki:

1. Jedno zamówienie surowca z zewnątrz i wiele uruchomień procesu produkcji.
2. Wiele zamówień z zewnątrz i tylko jedno uruchomienie procesu produkcji.

W pierwszym przypadku dla danej wartości o wyznaczana jest optymalna wielkość partii produkcji:

$$Q_{prod}^* = \sqrt{\frac{D \left(\frac{K_{zams}}{n} + K_{up} \right)}{k_{sks} \frac{1-\alpha}{2} n + A}}$$

gdzie:

$$A = (k_{sknp} - k_{sks}) \frac{P-D}{2P} + k_{sks} \frac{P-D}{P} \left(\alpha - (1-\alpha) \frac{\alpha D}{P-\alpha D} \right)$$

W kolejnym kroku wyznaczana jest optymalna liczba uruchomień produkcji n^* , która przy założeniu, że n jest liczbą całkowitą, wynosi:

$$n^* = \sqrt{\frac{K_{zams} A}{K_{up} k_{sks} \frac{1-\alpha}{2}}}$$

W drugim przypadku, kiedy występuje wiele zamówień na nowe surowce, optymalna wielkość partii produkcji wynosi:

$$Q_{prod}^* = \sqrt{\frac{D(oK_{zams} + K_{up})}{\frac{1}{2P}(Dk_{sks}A + k_{sknp}(P-D))}}$$

Optymalna liczba zamówień surowca o^* , przy założeniu, że o jest liczbą całkowitą, wynosi¹²:

$$o^* = \sqrt{\frac{K_{up}B}{K_{zams}C}}$$

gdzie:

$$B = Dk_{sks} \left(1 - \frac{\alpha(P-D)}{P-\alpha D} \right) (1-\alpha)$$

$$C = Dk_{sks} \frac{\alpha(P-D)^2}{P} \left(\frac{1}{D} + \frac{\alpha}{P-\alpha D} \right) + k_{sknp}(P-D)$$

3. PODSUMOWANIE

W pracy zaprezentowano przegląd modeli ekonomicznej wielkości zamówienia w logistyce zwrotów. Niemal wszystkie przedstawione modele są modyfikacjami modelu Schrady'ego. Większość dotyczy jednego produktu. Wszystkie zakładają, że jest to produkt składający się z jednego komponentu.

Przedstawione modele są deterministyczne, zakładają znajomość wszystkich parametrów modelu. Założenie, że liczba zwrotów jest znana i stała, jest dalekie od rzeczywistości. Ponieważ w praktyce produkty są zwracane w różnych odstępach czasu i w różnej liczbie, wykorzystanie przedstawionych modeli może okazać się niemożliwe.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Dobos, I., & Richter, K. The integer EOQ repair and waste disposal model – Further analysis. *Central European Journal of Operations Research*, 8 (2000), 173–194.
- [2] Dobos, I., & Richter, K. A production/recycling model with stationary demand and return rates. *Central European Journal of Operations Research*, 11 (2003), 35–46.
- [3] Dobos, I., & Richter, K. An extended production/recycling model with stationary demand and return rates. *International Journal of Production Economics*, 90 (2004), 311–323.
- [4] Dobos, I. Richter, K. A production/recycling model with quality consideration. *International Journal of Production Economics*, 104 (2006), 571–579
- [5] Fleischmann, M., Bloemhof-Ruwaard, J. M., Dekker, R., van der Laan, E., van Nunen, J. A. E. E., Van Wassenhove, L. N. Quantitative models for reverse logistics: A review. *European Journal of Operational Research*, 103 (1997), 1-17.
- [6] Hwang, H., Oh Y.H., 2006. Deterministic inventory model for recycling system. *Journal of Intelligent Manufac-*

¹² Richter, K. The EOQ repair and waste disposal model with variable setup numbers. *European Journal of Operational Research*, 95 (1996a), 313–324

- turing, 17 (2006), 423-428
- [7] Jaber, M. Y., & Rosen, M. A. The economic order quantity repair and waste disposal model with entropy cost. *European Journal of Operational Research*, 188 (2008), 109–120.
- [8] Koh, S.G., Hwang, H., Sohn, K.I., Ko, C.S., 2002. An optimal ordering and recovery policy for reusable items. *Computers & Industrial Engineering* 43, 59–73.
- [9] Mabini, M.C., Pintelon, L.M., and Gelders, L.F., EOQ type formulations for controlling repairable inventories. *International Journal of Production Economics* 28 (1992) 21-33.
- [10] Nahmias, S., and Rivera, H., A deterministic model for a repairable item inventory system with a finite repair rate. *International Journal of Production Research* 17 (1979) 215-221.
- [11] Richter, K. An EOQ repair and waste disposal model. *Proceedings of the Eight International Working Seminar on Production Economics*, 3 (1994), Innsbruck.
- [12] Richter, K. The EOQ repair and waste disposal model with variable setup numbers. *European Journal of Operational Research*, 95 (1996a), 313–324.
- [13] Richter, K. The extended EOQ repair and waste disposal model. *International Journal of Production Economics*, 45 (1996b), 443–447.
- [14] Richter, K. Pure and mixed strategies for the EOQ repair and waste disposal problem. *OR Spectrum*, 19 (1997), 123–129.
- [15] Richter, K., Dobos, I. Analysis of the EOQ repair and waste disposal model with integer setup numbers. *International Journal of Production Economics*, 59 (1999), 463–467.
- [16] Schrady, D.A., A deterministic inventory model for repairable items. *Naval Research Logistics Quarterly* 14/3 (1967) 391-398.
- [17] Saadany, A., Jaber M. Y. The EOQ repair and waste disposal model with switching costs. *Computers & Industrial Engineering*, 55 (2008), 219–233.
- [18] Teunter, R. H. Economic order quantities for recoverable item inventory system. *Naval Research Logistics*, 48 (2001), 484–495.
- [19] Teunter, R. H., & Flapper, S. D. P. Lot-sizing for a single-stage single-product production system with rework of perishable production defectives. *OR Spectrum*, 25 (2003), 85–96.
- [20] Teunter, R. H. Lot-sizing for inventory systems with product recovery. *Computers & Industrial Engineering*, 46 (2004), 431–441.
- [21] Thierry, M.C., Salomon, M., Van Nunen, J., Van Wassenhove, L., 1995. Strategic issues in product recovery management. *California Management Review* 37, 114–135.

reverse logistics encompasses the logistics activities all the way from used products no longer required By the user to products again usable in a market

SUMMARY

In reverse logistics systems demand can be satisfied with production or procurement and any kind of reuse option. The used products are brought back, stored and reused in due time to satisfy the demand. Same part of this flow can be also disposed of. Inventory management has a significant meaning in reverse logistics.

The goal of his paper is to investigate EOQ/EPQ models in reverse logistics. First EOQ model in reverse logistics was created by Schrady in 1967. Along the same line of research, new models were created by Nahmias and Rivera, Mabini et al., Richter, Dobos, Saadany and Jaber. These models are very interesting but as a deterministic are also very difficult to use in practice.

recenzent: dr hab. in . zenon zamiar